Egzamin z Topologii
04.02.22

Pisząc rozwiązania można powoływać się na twierdzenia i fakty, które były sformułowane na wykładzie lub listach zadań wykładowcy. Inne zadania lub fakty należy przytaczać wraz z pełnym uzasadnieniem. Każdą kartkę, którą chce się oddać w postaci skanu należy podpisać swoim imieniem i nazwiskiem. Bardzo prosimy o przesyłanie plików w formacie .pdf

Czas pracy: 2 godz. 30 minut (wliczając w to czas na przesłanie plików)

Zadanie 1. (8 punktów) W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ dany jest ciąg $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ zbieżny do punktu $a \in \mathbb{R}^n$. Niech

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{B(a_k, \tfrac{1}{k})},$$

gdzie $B(a_k, \frac{1}{k})$ jest kulą euklidesową w $\mathbb{R}^n$ o środku w a_k i promieniu $\frac{1}{k}$.

Udowodnij, że A jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy $a \in A$.

Zadanie 2. (8 punktów) Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją ciągłą pomiędzy zwartą przestrzenią metryczną X a przestrzenią Hausdorffa Y. Załóżmy, że $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$ jest zstępującym ciągiem zbiorów domkniętych w X.

(a) Udowodnij, że

$$f\left[\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right] = \bigcap_{n=1}^{\infty} f\left[A_n\right]$$

(b) Rozstrzygnij, czy teza w (a) jest też prawdziwa bez założenia o domkniętości zbiorów A_n.

Zadanie 3. (8 punktów) Niech X będzie przestrzenią spójną. Udowodnij, że jeśli $X = F \cup H$, gdzie F i H są domknięte oraz przecięcie $F \cap H$ jest spójne, to zbiory F i H są spójne.

Czy założenie domkniętości zbiorów F i H jest istotne?

Zadanie 4. (8 punktów) Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną zupełną.
Niech $\{f_t : X \to \mathbb{R} : t \in T\}$ (gdzie T to pewien zbiór indeksów) będzie rodziną funkcji ciągłych o wartościach rzeczywistych, ograniczoną punktowo, tzn. spełniony jest warunek:

$$(\forall x \in X)\ (\exists k \in \mathbb{N})\ (\forall t \in T)\ \ f_t(x) \in [-k, k].$$

Udowodnij (np. korzystając z twierdzenia Baire'a), że istnieje niepusty zbiór otwarty U w przestrzeni X oraz liczba naturalna m, takie, że

$$(\forall t \in T)\ \ f_t[U] \subseteq [-m, m].$$